

Diseño de Mercados de Correspondencia “Matching Markets”: Una Revisión de Literatura

Mateo Duque Carmona

Asesor: Jesús Alonso Botero García

Universidad EAFIT

Escuela de Economía y Finanzas

Pregrado en Economía

Medellín, Colombia

Mayo 2020

## Tabla de Contenido

<b>Introducción .....</b>	<b>3</b>
Aspectos relevantes, justificación y alcance .....	4
<b>Marco Conceptual.....</b>	<b>5</b>
<b>Metodología .....</b>	<b>6</b>
<b>Teoría del Diseño de Mercados de Correspondencia .....</b>	<b>10</b>
Correspondencia Uno a Uno .....	10
<i>Algoritmo de Aceptación Diferida.</i> .....	10
Correspondencia Muchos a Uno .....	12
<i>Mercado laboral.</i> .....	12
<i>Admisiones a la Universidad.</i> .....	14
<i>Programa Nacional de Asignación de Residentes (NRMP).</i> .....	15
<i>Otros Modelos de Asignación de Médicos.</i> .....	17
<i>Asignación de Estudiantes a Escuelas Públicas en EE. UU.</i> .....	18
Correspondencia Muchos a Muchos .....	21
Otros Mecanismos de Asignación .....	22
<i>Modelos de Equilibrio Competitivo.</i> .....	22
<i>Mecanismos de Subasta.</i> .....	24
<i>Otras Aplicaciones a los Conceptos de Mercados de Correspondencia.</i> .....	24
<b>Conclusiones .....</b>	<b>26</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>28</b>

## Introducción

Estamos viviendo una fuerte transformación por la evolución de la tecnología, el procesamiento de grandes volúmenes de datos, el desarrollo de la analítica y de la logística que han modificado los sectores productivos, la forma de consumo, la toma de decisión de los agentes económicos y de manera general cambios en la oferta y la demanda. Estos elementos de cambio habilitan la posibilidad de intercambio entre agentes económicos de cualquier bien o servicio, independiente de su ubicación geográfica o aspectos culturales. Los agentes económicos tienen hoy posibilidades no imaginadas unos años atrás y con estas nuevas posibilidades se ha acelerado el surgimiento y desarrollo de nuevos mercados.

El papel del economista ha sido entender el comportamiento de los mercados y explicarlos basado en los conceptos básicos de formación de precios y de la ley de la oferta y la demanda. Sin embargo, en este nuevo entorno de creación de nuevos mercados, los economistas han empleado diferentes herramientas teóricas y técnicas para tomar un rol activo e incluso llegar a ser parte fundamental en el diseño de los mismos. A los mercados que se hace referencia en este trabajo se les ha denominado de manera general como Mercados de Correspondencia (Matching Markets) o Mercados Bilaterales. Una característica fundamental de estos mercados, es la de la necesidad de una doble coincidencia entre el lado de la oferta y la demanda para llegar a un intercambio el cual no es definido únicamente vía precios, como lo expresa (A. E. Roth, 2012), un mercado de correspondencia es aquel donde el precio no hace todo el trabajo, en estos mercados, simplemente no puedes elegir lo que quieres, incluso si puedes pagarlo, también tienes que ser elegido.

En el presente trabajo de revisión de literatura de los Mercados de Correspondencia, se busca resolver las siguientes preguntas, ¿Cómo los economistas han modelado el problema de los

Mercados de Correspondencia a través del tiempo desde su introducción inicial en (Gale & Shapley, 1962) ?, ¿Los abordajes propuestos por la literatura de los Mercados de Correspondencia han tenido un impacto real y efectivo para resolver la complejidad de los mercados que vienen surgiendo?, ¿Podrá el Diseño de Mercados establecerse como una materia confiable que encuentre la solución a la distribución de bienes escasos de la forma más eficiente, en la medida que los mercados existentes evolucionen y otros nuevos y complejos mercados surjan?

### **Aspectos relevantes, justificación y alcance**

El desarrollo de esta revisión de literatura será de utilidad para todo economista que busca iniciar su investigación sobre los Mercados de Correspondencia y servirá para dar estructura y una guía a la literatura disponible. Adicionalmente, la principal justificación del desarrollo de este trabajo es inspirar a los economistas a tomar un rol más activo en el entorno de transformación digital, presentando los casos donde las propuestas realizadas por otros autores han sido consideradas en el diseño de mercados que hoy en día operan.

Finalmente, este trabajo no pretende exponer de forma técnica los mecanismos, herramientas y modelos desarrollados dentro de la literatura de Mercados de Correspondencia, más bien, busca identificar los avances teóricos de mayor impacto y sus aplicaciones en la realidad y dar respuesta a las preguntas de investigación antes planteadas.

## **Marco Conceptual**

En la teoría de Mercados de Correspondencia, el Algoritmo de Aceptación Diferida introducido en (Gale & Shapley, 1962), dio origen a una línea de desarrollos académicos buscando resolver al problema de asignación de parejas entre dos conjuntos de agentes diferentes. La solución del algoritmo es una asignación de parejas de tal manera que esta sea estable. El algoritmo consiste en que cada agente de uno de los dos conjuntos, realiza propuestas a los agentes del otro conjunto en el orden de sus preferencias. Los agentes del grupo que reciben dichas propuestas pueden rechazar las propuestas de los agentes que consideran inaceptables y en caso de recibir más de una propuesta por agentes aceptables, mantienen la propuesta del agente preferido en espera y rechazan las propuestas de los agentes menos preferidos. Los proponentes cuyas propuestas fueron rechazadas proceden a realizar una nueva propuesta al siguiente agente en su orden de preferencias. El algoritmo continúa hasta un número máximo de  $n^2 - 2n + 2$  iteraciones,  $n$  siendo el número de proponentes, y tiene fin en el momento en que ningún agente del conjunto de proponentes desea realizar una nueva propuesta.

Para el desarrollo de este trabajo es necesario presentar la definición de algunos conceptos que se emplearan a lo largo del mismo.

### **Asignación Estable**

Una asignación estable es aquella en la cual ningún agente es emparejado con otro agente que considere inaceptable y además ningún conjunto de dos agentes que no fueron asignados se prefieren mutuamente respecto a sus parejas actuales.

### **Mecanismo Incentivo-Compatible**

Un mecanismo es caracterizado como Incentivo-Compatible, si cada agente logra el mejor resultado posible actuando de acuerdo con sus verdaderas preferencias.

### **Núcleo en Juegos Cooperativos**

En la teoría de juegos cooperativos se evalúa qué coaliciones entre subconjuntos de agentes son estables, se define el núcleo como el conjunto de resultados factibles que no pueden ser mejorados por ninguna coalición entre un subconjunto de agentes.

### **Metodología**

Con el uso de la base de datos de citas de literatura científica SCOPUS y el término de búsqueda “Matching Markets”, el resultado de la consulta presentó un total de 427 referencias bibliográficas. A partir de los resultados se empleó el filtro de la herramienta de análisis por autor, con el fin de identificar los autores más activos en la literatura de Mercados de Correspondencia y se separaron estos artículos para la lectura de sus resúmenes. De la lectura de los resúmenes se identificaron las temáticas desarrolladas dentro de la literatura de los Mercados de Correspondencia presentados en la Tabla 1.

Posteriormente, con el uso de la herramienta de investigación Google Scholar se analizó el índice de citación de los artículos preseleccionados y se definió el conjunto final de trabajos a ser evaluados por su impacto en la literatura investigativa.

Esta revisión de literatura analiza los aportes de 43 artículos, evaluando cómo estos avanzaron en las temáticas más relevantes de la línea de investigación y presentando los resultados más influyentes en el cuerpo del trabajo. En la Tabla 2 se presenta el conjunto de artículos y se resume las diferentes temáticas que estos trataron.

**Tabla 1**

<b>Temáticas Analizadas en la Literatura de Mercados de Correspondencia</b>	
Correspondencia Uno a Uno	<b>A</b>
Correspondencia Muchos a Uno	<b>B</b>
Correspondencia Muchos a Muchos	<b>C</b>
Otros Mecanismos de Asignación	<b>D</b>
Fuente: creación propia, 2020	

**Tabla 2**

<b>Artículos y Temas Relevantes en la Literatura de Mercados de Correspondencia</b>				
<b>Título, Autor</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
College Admissions and the Stability of Marriage; David Gale & Lloyd S. Shapley (1962)	X	X		
Stable Marriage Assignments for Unequal Sets; D. G. McVitie & L. B. Wilson (1970)	X			
The Stable Marriage Problem; D. G. McVitie & L. B. Wilson (1971)	X			
The Assignment Game I: The Core; Lloyd S. Shapley & Martin Shubik (1971)	X			X
On cores and indivisibility; Lloyd S. Shapley & Herbert Scarf (1974)	X			X
Mariages Stables; Donald E. Knuth (1976)	X			
Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm; L. E. Dubins & D. A. Freedman (1981)	X			
Job Matching with Heterogeneous Firms and Workers; Vincent P. Crawford & Elsie M. Knoer (1981)		X		X

Job matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes; Alexander S. Kelso & Vincent P. Crawford (1982)	X	X
The Economics of Matching Stability and Incentives; Alvin E. Roth (1982)	X	X
Common and conflicting interests in two-sided matching markets; Alvin E. Roth (1985)	X	X
The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem; Alvin E. Roth (1985)	X	X
The Strategy Structure of Two-Sided Matching Markets; Gabrielle Demange & David Gale (1985)	X	X
On the allocation of residents to rural hospitals A general property of two-sided matching markets; Alvin E. Roth (1986)	X	
Multi-Item Auctions; Gabrielle Demange, David Gale & Marilda Sotomayor (1986)	X	X
Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis; Alvin E. Roth & Marilda Sotomayor (1990)	X	X
Random Paths to Stability in Two-Sided Matching; Alvin E. Roth & John H. Vande Vate (1990)	X	X
Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets; Tayfun Sönmez (1997)	X	
Simple Mechanisms to Implement the Core of College Admissions Problems; José Alcalde & Antonio Romero Medina (1997)	X	X
Hiring Procedures to Implement Stable Allocations; José Alcalde, David Perez Castrillo & Antonio Romero Medina (1998)		X
The redesign of the matching market for american physicians: Some engineering aspects of economic design; Alvin E. Roth & Elliott Peranson (1999)	X	X
Truncation strategies in matching markets - In search of advice for participants; Alvin E. Roth & Uriel G. Rothblum (1999)	X	
Existence of stable outcomes and the lattice property for a unified matching market; Marilda Sotomayor (2000)	X	X



School Choice: A Mechanism Design Approach; Atila Abdulkadiroğlu & Tayfun Sönmez (2003)	X	X
Implementation in the many-to-many matching market; Marilda Sotomayor (2004)	X	
A theory of stability in many-to-many matching markets; Federico Echenique & Jorge Oviedo (2004)	X	
The New York City High School Match; Atila Abdulkadiroğlu, Parag A. Pathak & Alvin E. Roth (2005)	X	
Changing the Boston School Choice Mechanism; Atila Abdulkadiroğlu, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth & Tayfun Sönmez (2006)	X	X
Paths to stability for matching markets with couples; Bettina Klaus & Flip Klijn (2007)	X	X
What's the Matter with Tie-breaking? Improving Efficiency in School Choice; Aytek Erdil & Haluk Ergin (2008)	X	X
Incentives and stability in large two-sided matching markets; Fuhito Kojima & Parag A. Pathak (2009)	X	
Constrained school choice; Guillaume Haeringer & Flip Klijn (2009)	X	X
Stable many-to-many matchings with contracts; Bettina Klaus & Markus Walz (2009)	X	X
Marriage matching and intercorrelation of preferences; James W. Boudreau & Vicki Knoblauch (2010)	X	
Virtual machine coscheduling: A game theoretic approach; Jaspal Singh Dhillon, Suresh Purini & Sanidhya Kashyap (2013)	X	X
Stability in large matching markets with complementarities; Itai Ashlagi, Mark Braverman & Avinatan Hassidim (2014)	X	X
Online dating recommendations: Matching markets and learning preferences; Kun Tu, Bruno Ribeiro, David Jensen, Don Towsley, Benyuan Liu, H. Jiang & X. Wang (2014)	X	
Efficient matching under distributional constraints: Theory and applications; Yuichiro Kamada & Fuhito Kojima (2015)	X	X
Distributed satisfaction-aware relay assignment: a novel matching-game approach; Dianxiong Liu, Yitao Xu, Yiwei Xu, Cheng Ding, Kun Xu & Yuhua Xu (2016)	X	X

Unbalanced random matching markets: The stark effect of competition; Itai Ashlagi, Yash Kanoria & Jacob D. Leshno (2017)	X	X
Stability and strategy-proofness for matching with constraints: A necessary and sufficient condition; Yuichiro Kamada & Fuhito Kojima (2018)	X	X
Many-to-many collaborator recommendation based on matching markets theory; Xiangjie Kong, Linyan Wen, Jing Ren, Mingliang Hou, Minghao Zhang, Kang Liu & Feng Xia (2019)	X	X
Self-Organizing Relay Selection in UAV Communication Networks: A Matching Game Perspective; Dianxiong Liu, Yuhua Xu, Jinlong Wang, Yitao Xu, Alagan Anpalagan, Qihui Wu, Hai Wang & Liang Shen (2019)	X	X
Fuente: creación propia, 2020		

## Teoría del Diseño de Mercados de Correspondencia

### Correspondencia Uno a Uno

#### Algoritmo de Aceptación Diferida.

En (Gale & Shapley, 1962), fue introducido el Algoritmo de Aceptación Diferida y la noción de estabilidad empleada a lo largo de la literatura. Además, se demostraron dos teoremas que fueron la base para investigaciones posteriores. Primero, partiendo de cualquier patrón de preferencias y siempre que dichas preferencias sean estrictas, el conjunto de asignaciones estables es no vacío. Segundo, la elección del conjunto que realiza las propuestas tiene consecuencias en el resultado del mismo. Para ilustrar lo anterior considere el problema del matrimonio, donde hay un conjunto de hombres y otro conjunto de mujeres. Si las propuestas

son realizadas por el conjunto de hombres, se llega a una asignación óptima para el conjunto de hombres y si por el contrario quien propone es el conjunto de mujeres, la asignación es óptima para el conjunto de mujeres. De ahora en adelante estos mecanismos estables serán representados como GS Hombre-Propone, GS Mujer-Propone y mecanismo GS de forma general.

Avanzando en la asignación de parejas en el mercado del matrimonio, cuando se tiene dos conjuntos con un número asimétrico de agentes, (D. G. McVitie & Wilson, 1970) demostraron que sin importar qué mecanismo sea empleado (GS Hombre-Propone o GS Mujer-Propone), los agentes que no fueron asignados a una pareja siempre son los mismos. Adicionalmente (D. McVitie & Wilson, 1971) propuso una operación para encontrar el conjunto de todas las asignaciones estables partiendo de la asignación estable Hombre-Óptimo, el cual llamaron “breakmarriage”.

Posteriormente (Donald E. Knuth, 1976) con el teorema de la retícula (Lattice) presentó una característica de las asignaciones óptimas resultado del mecanismo GS, el cual favorece al conjunto proponente y al mismo tiempo asigna al conjunto contrario con los agentes de su preferencia de menor valoración, evidenciando un conflicto de intereses entre la asignación estable Hombre-Óptimo y Mujer-Óptimo.

Respecto a las propiedades estratégicas del mecanismo GS (A. E. Roth, 1982) demostró, que no existe ningún mecanismo de asignación que tenga como resultado una correspondencia estable que además sea Incentivo-Compatible para todos los agentes. Un resultado adicional, es que existen mecanismos de correspondencia, que aseguran la estabilidad y la Incentivo-Compatibilidad, al menos para todos los agentes pertenecientes al conjunto de proponentes. Resultados equivalentes fueron obtenidos en (Dubins & Freedman, 1981).

En (A. E. Roth & Sotomayor, 1990) se analizaron a fondo las propiedades estratégicas de los Mercados de Correspondencia, los incentivos individuales de los agentes, el comportamiento del mercado y las posibilidades de manipulación de los agentes a través de la declaración de preferencias falsas. Además, resaltaron la importancia de hacer uso de las herramientas de la teoría de juegos para diseñar mecanismos que eliminen la posibilidad de manipular la asignación al menos para los agentes de uno de los dos conjuntos del mercado.

En (Boudreau & Knoblauch, 2008) se analizaron los resultados del mecanismo GS agregando correlación en las preferencias de los agentes (hombres-mujeres) y demostraron que, en presencia de una correlación positiva, el bienestar del conjunto de mujeres aumenta y disminuyen los incentivos a la manipulación. Por el contrario, si la correlación es negativa, los resultados demuestran un conflicto de intereses entre los dos conjuntos.

### **Correspondencia Muchos a Uno**

El análisis de Correspondencia Muchos a Uno aborda varios problemas, mercado laboral, asignación de aspirantes a las universidades, asignación de médicos residentes a hospitales y asignación de estudiantes a escuelas públicas.

#### **Mercado laboral.**

Varios artículos han analizado la posibilidad de resolver los problemas asociados a la coordinación de agentes y lograr asignaciones estables en mercados laborales descentralizados. (Alcalde, Pérez-Castrillo, & Romero-Medina, 1998) implementaron la correspondencia estable de un mercado de búsqueda de empleo en Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS), usando un mecanismo secuencial en el que las empresas proponen un salario a cada trabajador (primera etapa) y, luego, cada trabajador acepta como máximo una propuesta (segunda etapa).

Además, debe darse la condición de que las preferencias de los agentes sean aditivas. Este mecanismo implementa en el ENPS la correspondencia óptima de las empresas cuando las empresas utilizan estrategias no dominadas. Los autores también construyeron otro mecanismo secuencial simple donde se permuta el orden de las decisiones y que implementa la correspondencia óptima de los trabajadores cuando las preferencias de los agentes son aditivas.

Planteando un mercado laboral con información incompleta y distribuida simétricamente, (A. Roth & Rothblum, 1999) analizaron el problema implementando el mecanismo GS Trabajador-Propone y demostraron que con información incompleta el alcance del comportamiento estratégico rentable se reduce considerablemente, aunque no se elimina por completo, de hecho, la estrategia óptima para el conjunto de trabajadores es presentar una versión reducida de sus verdaderas listas de preferencias.

El mercado laboral también puede ser modelado como un mercado donde los trabajadores pueden aplicar simultáneamente a puestos de trabajo con propiedades diferentes, unos donde el salario es negociado en el proceso y otros donde el salario hace parte de la descripción de la vacante. En (Sotomayor, 2000) se ofrece una demostración del teorema de asignaciones estables, común a ambos modelos. Adicionalmente, prueba que cuando el núcleo definido por la dominación fuerte coincide con el núcleo definido por la dominación débil, el conjunto de asignaciones estables cumple la estructura de retícula introducida por (Donald E. Knuth, 1976).

(A. Roth & Vande Vate, 1990) demostraron que en el mercado laboral se puede lograr una asignación estable mediante un proceso descentralizado, el mecanismo propuesto fue llamado Instability-Chaining Algorithm. Finalmente demostraron que, partiendo de una asignación arbitraria, el proceso de solucionar coaliciones entre pares de bloqueo elegidas al azar, converge a una asignación estable. Una generalización de este resultado fue lograda por (B.

Klaus & Klijn, 2007) usando un mecanismo conocido como Deterministic Path Algorithm for Weakly Responsive Couple (DPC). Con el algoritmo DPC, demostraron que, en presencia de preferencias débilmente receptivas, siempre se pueden alcanzar resultados estables mediante la toma de decisiones descentralizadas. Además, mostraron que cuando existen asignaciones estables, pero las preferencias no son débilmente receptivas no se puede emplear el mecanismo DPC que converja a un resultado estable.

### **Admisiones a la Universidad.**

En el modelo de admisiones a la universidad, las anteriores tienen preferencias sobre un conjunto de estudiantes y tienen además una cuota máxima de estudiantes a ser admitidos. Cada estudiante tiene preferencias sobre las universidades y es asignado máximo a una universidad. Inicialmente (A. Roth, 1985b) analizó la posibilidad de trasladar las propiedades estratégicas del mecanismo GS obtenidas en el problema del matrimonio al problema de admisiones. Se demostró que en el mecanismo Estudiante-Propone, la asignación estable es óptima e Incentivo-Compatible para el conjunto de estudiantes, sin embargo, dichas propiedades no se generalizan para el mecanismo Universidad-Propone, para este caso no existe un mecanismo estable Incentivo-Compatible para las universidades ni inmune a manipulaciones a través de preferencias falsas o revelación errónea de cupos disponibles.

En (Alcalde & Romero-Medina, 1997) se propusieron dos mecanismos simples para resolver la asignación de estudiantes a la universidad aplicando juegos de dos etapas. tanto con Estudiante-Propone (primera etapa) y Universidad-Decide (Segunda etapa), como con Universidad-Propone y Estudiante-Decide. Demostraron que el primer mecanismo implementa el núcleo del mercado en el ENPS e implementa la asignación óptima para estudiantes en el

Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos Pareto-Eficiente. Lamentablemente en el segundo mecanismo es posible implementar el núcleo del mercado en el ENPS únicamente.

En (Kojima & Pathak, 2009) analizaron los mercados de asignación de estudiantes a universidades empleando el mecanismo GS Estudiante-Propone, demostraron que, al aumentar el tamaño del mercado, las oportunidades de manipulación rentable disminuyen. Adicionalmente, a medida que el mercado se hace más grande, el conjunto de asignaciones estables se hace más pequeño.

### **Programa Nacional de Asignación de Residentes (NRMP).**

El mecanismo GS ha sido implementado en mercados reales a lo largo del tiempo, esto por ser una forma muy intuitiva de resolver el problema de asignación, simulando el proceso de propuesta y rechazo empleado en la realidad. En la práctica se ha implementado en el diseño de cámaras de compensación cuando se requiere corregir alguna falla observada en el mercado. Este fue el caso para el mercado laboral de médicos residentes en E.E.U.U. luego que el proceso de contratación implementado independientemente por cada hospital, llevó a los hospitales a presentar ofertas a sus prospectos hasta dos años antes de obtener el título como profesionales, generando un gran número de compromisos no cumplidos (A. E. Roth, 1984). El diseño de la cámara de compensación para corregir esta falla de mercado fue el objeto de estudio de un gran número de trabajos de investigación dentro de la literatura de Mercados de Correspondencia.

Inicialmente usando el proceso denominado NIMP (National Intern Matching Program), que había sido desarrollado en 1953 e implementado para asignar médicos a hospitales en esta época, (A. Roth, 1985a) demostró que este algoritmo no era Incentivo-Compatible para el conjunto de hospitales. Posteriormente, Elliot Peranson propuso una variación del mecanismo

Hospital-Propone GS el cual fue implementado en la década de los 70, sobre dicho mecanismo no se tiene referencia bibliográfica (A. Roth, 2008). Con los años, cambios en el mercado hicieron que el mecanismo perdiera su efectividad para crear asignaciones. Autores como Peranson y Roth identificaron que el mecanismo GS fallaba principalmente por la introducción de complementariedades al mercado. Las complementariedades se presentaron en la forma de matrimonios compuestos por pares de médicos en el conjunto de médicos buscando dos residencias en la misma ciudad, médicos buscando vacantes en residencias de segundo año y hospitales con programas de residencia con vacantes que transferían a otros programas si permanecían sin llenar. Esto representó un nuevo reto ya que en mercados con complementariedades el conjunto de asignaciones estables podría ser vacío y en el caso de existir, estas no serían óptimas para ningún conjunto de agentes (A. E. Roth, 1984). Adicionalmente, bajo dichas complementariedades, no existe un mecanismo Incentivo-Compatible (A. Roth, 1985). En contraparte no existe una asignación estable e inmune a manipulaciones por parte de los hospitales (Sönmez, 1997). A pesar que las posibilidades de manipulación a través de capacidades son limitadas, por ejemplo, si la capacidad de un hospital es de dos vacantes, entonces la única manipulación posible es informar una capacidad de una vacante, estas pueden ser lo suficientemente buenas como para generar incentivos suficientes.

Entre 1995 y 1998 se desarrolló un nuevo algoritmo para la cámara de compensación utilizado por el NRMP presentado en (A. Roth & Peranson, 1999). Este mecanismo ha sido implementado desde 1998 y posteriormente ha sido adoptado por más cámaras de compensación del mercado laboral. El algoritmo es una generalización del mecanismo GS que permite a las parejas de médicos establecer preferencias sobre pares de residencias, permite a los hospitales especificar reversiones de posiciones y se ocupa de algunas otras características del mercado. A



diferencia del mecanismo GS para mercados de asignación sin complementariedades, este algoritmo no produce una asignación estable desde la primera etapa, en cambio, emplea un mecanismo Médico-Propone siguiendo el procedimiento propuesto en (A. Roth & Vande Vate, 1990) donde se acumula una pila de pares de bloqueo y luego se procede a resolver el conflicto de dichos pares uno a la vez. Finalmente, siguiendo este proceso de forma secuencial se llega a una asignación estable.

### **Otros Modelos de Asignación de Médicos.**

El caso específico de asignación de médicos a hospitales rurales, fue abordado en (A. Roth, 1986). El autor demostró que los hospitales rurales no cubrían todos sus cupos en el equilibrio estable. Se encontró que ante preferencias estrictas sobre los aspirantes y con preferencias receptivas de los hospitales, implementando el mecanismo GS los hospitales siempre cubrían sus cupos con el mismo conjunto de estudiantes, siendo este un resultado equivalente al encontrado por (McVitie & Wilson, 1970).

Dentro de la literatura se encuentran también artículos que tratan el problema de asignación de pasantes de psicología a hospitales. En (Ashlagi, Braverman, & Hassidim, 2014) analizan los resultados empleando un mecanismo llamado Sorted Deffered Acceptance (SODA) y los comparan con los resultados obtenidos empleando el mecanismo diseñado en (Roth & Peranson, 1999). Respecto al SODA, se demuestra que, si el número de matrimonios entre psicólogos crece a una velocidad casi lineal, los ciclos de rechazo no aumentan con probabilidad alta y converge a una asignación estable. Sin embargo, si el número de matrimonios crece de forma lineal, no existe resultado estable.

En algunos mercados laborales médicos se ha presentado la preocupación por los entes gubernamentales de tener una población de médicos residentes distribuidos a lo largo del país. Este es el caso para el mercado de médicos residentes en Japón, donde el gobierno impone una cuota máxima de médicos asignados a programas de residencias por región. A este fenómeno se le ha estudiado en la teoría de Mercados de Correspondencia como restricciones distribucionales. En (Kamada & Kojima, 2015) se demuestran algunos contextos donde estas restricciones distribucionales se han presentado y proponen un mecanismo llamado mecanismo flexible de aceptación diferida que tiene en cuenta la restricciones distribucionales y demuestran que tiene mejores resultados que el mecanismo empleado en Japón para asignar médicos a residencias (Japan Residency Matching Program JRMP), en resumen el mecanismo es Incentivo-Compatible para el conjunto de médicos y crea asignaciones estables eficientes. Adicionalmente, presentan dos propiedades de los Mercado de Correspondencia en presencia de restricciones distribucionales, primero, demuestran que bajo estas condiciones, los resultados óptimos podrían no existir y segundo, evaluando diferentes asignaciones estables se encontró que diferentes hospitales quedaban con vacantes sin asignar, lo que contradice los resultados de (A. Roth, 1986) y (D. G. McVitie & Wilson, 1970). Avanzando al problema de restricciones distribucionales (Kamada & Kojima, 2018) demostraron que una condición necesaria para que existan mecanismos estables e Incentivo-Compatibles bajo restricciones distribucionales, es que dichas restricciones formen jerarquías entre ellas.

### **Asignación de Estudiantes a Escuelas Públicas en EE. UU.**

Otro mercado en el que se ha implementado el uso de una cámara de compensación centralizada es en el de la asignación de niños a las escuelas públicas en EE. UU., con casos

descritos en la literatura en New York y Boston. La principal diferencia entre el mercado escolar de Nueva York y Boston, es que el primero considera las preferencias de las escuelas y estudiantes y en el segundo se considera únicamente las preferencias de los estudiantes, en este caso las escuelas son agentes pasivos, recursos para ser consumidos por los estudiantes (Sönmez, Abdulkadiroglu, & Sonmez, 2003).

### ***Asignación de Estudiantes en Nueva York.***

En cuanto al diseño del mecanismo de asignación en el mercado de escuelas de Nueva York, (Pathak, Abdulkadiroglu, & Roth, 2005) estudiaron de cerca el comportamiento de los agentes que participaban en él. Inicialmente observaron que las escuelas de la ciudad actuaban como agentes estratégicos que contaban con la capacidad de admitir grupos de estudiantes según las preferencias de cada escuela. Considerando lo anterior, los autores llegaron a la conclusión que el mecanismo a ser implementado debía ser una versión del mecanismo GS Estudiante-Propone, ya que contenía las mejores propiedades para garantizar el bienestar de los estudiantes, siendo un mecanismo Incentivo-Compatible para dicho conjunto.

### ***Asignación de Estudiantes en Boston.***

Para el caso de las escuelas públicas en Boston, inicialmente se evidenció la diferencia en el comportamiento estratégico y libertad de las escuelas en comparación con el caso en Nueva York. La principal característica de este mercado es que las escuelas no tienen la capacidad de presentar preferencias individualmente, por el contrario, en este mercado una institución central define los criterios que definen la prioridad entre un estudiante y otro, y estos criterios son impuestos sobre todas las escuelas. Se demostró a través de un análisis empírico, que había una necesidad de implementar mecanismos Incentivo-Compatibles que eliminarán la necesidad de

los padres de adoptar estrategias elaboradas para obtener un mejor resultado para sus hijos (Abdulkadiroglu, Pathak, Roth, & Sonmez, 2006) En el proceso de diseño evaluaron dos mecanismos diferentes, primero, un mecanismo GS Estudiante-Propone y segundo, un mecanismo TTC. A pesar que ambos presentaban la propiedad de ser Incentivo-Compatibles, estos tenían resultados de asignación con propiedades diferentes. El mecanismo TTC demostró tener un resultado Pareto Eficiente, sin embargo, dicho mecanismo sólo tenía en cuenta el bienestar de los estudiantes por lo que era Pareto Dominado por el mecanismo GS. El mecanismo GS presentaba mejores resultados cuando las prioridades de las escuelas son impuestas estrictamente, Finalmente, el mecanismo GS fue elegido por su simplicidad y facilidad para comunicar a los padres como participar en el proceso.

### ***Otros Modelos de Asignación de Estudiantes a Escuelas Públicas.***

El resultado estable Estudiante-Óptimo puede ser implementado únicamente cuando las preferencias de los estudiantes son estrictas, en situaciones de indiferencia en los órdenes de prioridad, estas se rompen con algún procedimiento de desempate aleatorio, el impacto de estos desempates es una disminución del bienestar de los estudiantes. Esta situación se resolvió con un algoritmo de tiempo polinómico (Erdil & Ergin, 2008). Partiendo de cualquier asignación estable y en presencia de preferencias débiles, el algoritmo lleva a cabo una serie de ciclos de mejora estable que converge al resultado estable Estudiante-Óptimo.

Por su parte (Haeringer & Klijn, 2009) evaluaron tres mecanismos, el modelo BOS usado en Boston originalmente, el mecanismo GS Estudiante Óptimo y el algoritmo TTC. El principal objetivo del artículo fue evaluar los resultados de los mecanismos restringiendo el número de escuelas que los estudiantes pueden agregar en sus listas de preferencias. Segundo, para el

mecanismo GS y TTC demostraron que los resultados eficientes de equilibrio de Nash pueden garantizarse si, y sólo si, las prioridades de las escuelas satisfacen una nueva condición de aciclicidad. Esta condición establece que dos escuelas no pueden priorizar de manera diferente a dos estudiantes que compiten por el último asiento disponible en ambas escuelas. El resultado es diferente en el caso del mecanismo BOS, donde los resultados de equilibrio de Nash son siempre estables. Finalmente, agregar restricciones a las listas de preferencia obliga a los agentes a elaborar estrategias, lo que a su vez puede reducir el interés del creador de políticas de usar el mecanismo GS o TTC.

### **Correspondencia Muchos a Muchos**

Existen situaciones en los mercados laborales donde los trabajadores buscan ser asignados a más de una posición. La literatura de los Mercados de Correspondencia ha modelado este problema como una asignación muchos a muchos. (Echenique & Oviedo, 2004) analizaron la estabilidad en las correspondencias de mercados laborales de muchos a muchos y encontraron las diferentes condiciones para que un mecanismo de asignación llegue a un emparejamiento con estabilidad por conjunto (Setwise-Stable). En resumen, definieron las condiciones de (Sustitutos y Sustitutos Fuertes) bajo las cuales el núcleo podría no ser vacío y se puede implementar a través de un algoritmo. Finalmente, si las preferencias de las empresas respetan la condición de sustitutos, y las preferencias de los trabajadores cumple la forma de sustitutos fuertes, las propiedades de los Mercados de Correspondencia de muchos a muchos son paralelas a las propiedades de los Mercados de Correspondencia de muchos a uno, es decir, el conjunto estable por conjunto es igual al conjunto estable por pares, y el conjunto estable por conjunto es una retícula no vacía.

En (Sotomayor, 2004) se emplea un mecanismo de salario fijo de dos etapas, en la primera etapa el conjunto de empresas le propone a un conjunto de trabajadores que desea contratar, en la segunda etapa, los trabajadores deciden las empresas en las que desean trabajar. El mecanismo demostró siempre implementar una asignación estable por pares (Pairwise-Stable) en el ENPS y adicionalmente, cuando las preferencias de los agentes son Maximin, el núcleo del mercado contiene los resultados del equilibrio.

Otra forma de modelar los Mercado de Correspondencia muchos a muchos se encuentra en (B.-E. Klaus & Walzl, 2009) donde los autores modelaron el mercado de correspondencia con la inclusión de contratos. Bajo esta configuración hay un conjunto de vendedores y un conjunto de compradores que pueden intercambiar simultáneamente con más de un agente. Adicionalmente, hay un conjunto de contratos bilaterales que especifican las condiciones del intercambio. En este artículo analizaron varias conceptualizaciones de estabilidad, estabilidad por conjunto, estabilidad débil por conjunto y estabilidad por pares, finalmente demostraron que, si un lado del mercado presenta preferencias como sustitutos fuertes y el otro como sustitutos, las tres nociones de estabilidad coinciden y el conjunto de asignaciones estables por pares es no vacío.

## **Otros Mecanismos de Asignación**

### **Modelos de Equilibrio Competitivo.**

En la literatura temprana otros autores abordaron el problema de los Mercados de Correspondencia como un mercado de oferta y demanda, donde dos conjuntos de agentes (vendedores y compradores) intercambian un bien indivisible. A través de un problema de optimización se busca un precio que maximiza las utilidades de los agentes. El resultado del

modelo corresponde al equilibrio competitivo. (Shapley & Shubik, 1971) demostraron que el equilibrio competitivo es una solución del núcleo del mercado.

Posteriormente, (Shapley & Scarf, 1974) resolvieron el modelo para bienes indivisibles con  $n$  agentes como un problema de optimización con programación lineal y analizaron su relación con el núcleo del mercado. Definieron el procedimiento denominado Gale's Top Trading Cycles (TTC), con el cual se resuelve el problema de optimización con el supuesto de preferencias estrictas. Este procedimiento es un avance al mecanismo estable GS que beneficia arbitrariamente a un solo conjunto de agentes, y que no garantiza que el equilibrio competitivo sea un punto del núcleo. En síntesis, el procedimiento TTC satisface el Óptimo de Pareto, la Incentivo-Compatibilidad y la Racionalidad Individual.

Agregando al modelo de compradores y vendedores de bienes indivisibles (Demange & Gale, 1985) encontraron que el vector de precios del equilibrio general presentaba la misma estructura antes analizada por (Donald E. Knuth, 1976), donde se forma una retícula (lattice) con un precio máximo y un precio mínimo. También, demostraron que, implementado el equilibrio general de precio mínimo, el mecanismo es Incentivo-Compatible para el conjunto de compradores y, además, ningún subconjunto de ellos puede formar coaliciones rentables. El segundo resultado se refiere a la situación estratégica para los vendedores, que siempre tendrán la posibilidad de aumentar sus beneficios mediante una falsificación de sus valoraciones. Al falsificar las preferencias, los vendedores pueden forzar el pago por el equilibrio máximo en lugar del precio mínimo.

(Ashlagi, Kanoria, & Leshno, 2017) estudiaron la competencia en Mercados de Correspondencia caracterizando las preferencias de los agentes con una función de distribución aleatoria y consideraron un mercado asimétrico en el número de agentes en cada lado del

mercado. Compararon los resultados con el de un mercado competitivo, demostrando que, en presencia de estos desequilibrios, el conjunto de asignaciones estables es pequeño y podría ser único.

### **Mecanismos de Subasta.**

Una línea de desarrollos diferente analizó el mecanismo GS como una forma de mecanismo de subasta, analizando la correspondencia en el mercado laboral con empresas y trabajadores. (Crawford & Knoer, 1981) propusieron un mecanismo GS Empresa-Propone donde las empresas proponen salarios cada vez más altos como un proceso de ajuste salarial. Adicionalmente, analizando el proceso de ajuste salarial como un juego cooperativo con utilidades transferibles, (Kelso & Crawford, 1982) demostraron que, si las preferencias de las empresas sobre los trabajadores cumplen el supuesto de sustitutos brutos, tanto el equilibrio general como el núcleo del mercado existen. Siguiendo esta línea de aportes (Demange, Gale, & Sotomayor, 1986) abordaron el problema anterior como una subasta combinatoria donde empresas proponen para contratar a un grupo de trabajadores. Para resolver la asignación emplean una variación de la subasta de segundo precio de (Vickrey, 1961) y obtuvieron una asignación Pareto Eficiente e Incentivo-Compatibles. Adicionalmente, demostraron que los precios finales son iguales a los precios del equilibrio competitivo que implementan los pagos de Vickrey.

### **Otras Aplicaciones a los Conceptos de Mercados de Correspondencia.**

En (Dhillon, Purini, & Kashyap, 2013) usaron la teoría de Mercados de Correspondencia para proporcionar una perspectiva para optimizar el rendimiento de un conjunto de varias máquinas virtuales en una máquina física. Este problema se ha resuelto tradicionalmente como



un problema de optimización que tiene como función objetivo minimizar la degradación del rendimiento de cada máquina virtual. En el artículo propusieron plantear el problema como un mercado de correspondencia uno a uno (Mercado Matrimonial). Esta representación demuestra tener propiedades deseables, ya que ninguna máquina virtual necesita revelar su lista de preferencias a ninguna otra. Esto permite que cada máquina virtual tenga una función de costo privado. Adicionalmente, el problema tiene una asignación estable que puede ser alcanzada a través de un algoritmo.

En (Tu et al., 2014) estudiaron los sistemas de recomendación para citas en línea usando el abordaje de los Mercados de Correspondencia. Propusieron un marco de bilateral para las recomendaciones de citas en línea y diseñaron un algoritmo usando teorías de la sociología, machine learning y analítica para conocer las preferencias de los usuarios. Los resultados demostraron que caracterizar los datos de un gran sitio web de citas en línea, como un mercado de correspondencia, mejora la tasa de coincidencias exitosas hasta en un 45%.

En (Liu et al., 2016) mostraron la aplicación de la teoría de Mercados de Correspondencia para resolver un problema de una red de comunicaciones inalámbrica, donde existe una red con nodos fuente y nodos de retransmisión. El problema de asignación se modela como un mercado de correspondencia muchos a uno, donde los nodos fuente aplican a los nodos de retransmisión de acuerdo con sus requisitos de rendimiento, mientras tanto, los nodos de retransmisión obtienen beneficios al ayudar a los nodos de origen a transmitir datos. Finalmente, demuestran que el algoritmo propuesto converge a una coincidencia estable entre los nodos fuente y los nodos de retransmisión.

Una aplicación de los conceptos de correspondencia de muchos a muchos, se presentó en (Kong et al., 2019) donde se busca constituir equipos de colaboración entre investigadores

científicos. Para resolver el problema de asignación se propusieron dos algoritmos, el Priority to Popular Groups (PPG) y el Minimum Cost in Step (MCS).

Otra aplicación basada en la teoría de correspondencias muchos a mucho, es la de lograr una comunicación oportuna entre una red de vehículos aéreos no tripulados (UAV), presentada en (Liu et al., 2019). La construcción de redes de comunicación entre UAV es clave para ayudar a estos dispositivos a comunicarse a larga distancia sin que todos los UAV tengan una máxima potencia para transmitir. Estas redes están compuestas por un gran número de UAV que retransmiten datos entre ellos partiendo desde la señal enviada por la base. Después de discutir los desafíos y los requisitos del sistema, los autores encontraron que el modelo de correspondencia es adecuado para modelar el modelo complejo de retransmisión de datos.

### **Conclusiones**

Lo que inició como una solución a un problema académico, el Algoritmo de Aceptación Diferida de Gale y Shapley, se constituyó en un marco conceptual muy poderoso para abordar una serie de problemas reales de correspondencia en mercados uno a uno, muchos a uno y finalmente muchos a muchos. Cada nuevo problema abordado con esta conceptualización, exigió a los economistas estudiar y entender las necesidades e incentivos de todos los agentes participantes, con el fin de construir bienestar social. Cada problema requirió incluir conocimientos y modelos utilizados en otros campos de la economía, como la teoría de juegos, el análisis del comportamiento humano y la toma de decisiones, también el álgebra lineal, las metodologías de optimización con diferentes restricciones, la construcción de funciones de beneficio y el uso del modelo de equilibrio general, entre otros. El marco conceptual que se ha

desarrollado permite hoy abordar muchos tipos de problemas de asignación y entrega a los economistas una caja de herramientas amplia para ser usada en el diseño de mercados.

Los abordajes propuestos han resuelto problemas reales tales como la asignación de estudiantes a las escuelas públicas, asignación de médicos residentes a los hospitales en varios países del mundo (USA, Japón, Alemania, Gran Bretaña, entre otros), soluciones de emparejamiento para el mercado laboral en diferentes campos, asignación de médicos a hospitales en zonas rurales, recomendación de parejas a través de plataformas de citas por internet y en los últimos años, la literatura propone soluciones a problemas tan variados como la retransmisión óptima de datos en redes de comunicación inalámbricas, esquemas de comunicación entre drones y optimización en el desempeño de máquinas virtuales. Lo que se prevé es que el marco conceptual desarrollado puede servir para resolver correspondencias en mercados de comercio electrónico cada vez más complejos que pueden surgir en esta era de transformación digital.

Con los avances logrados en los Mercados de Correspondencia y el marco conceptual desarrollado, los economistas no solo podrán analizar o evaluar la estabilidad de los mecanismos propuestos o su eficiencia y sus propiedades estratégicas, sino también participar en el diseño de tales mercados y su asesoría para corregir las fallas observada en los mercados. El rol de diseñadores de mercados fue requerido de forma explícita para el caso de asignación de estudiantes en las escuelas de Boston y New York y en la corrección y mejoramiento el esquema usado en el NRMP para asignación de médicos residentes a los hospitales en los Estados Unidos.

Finalmente, se ha demostrado que los modelos de emparejamiento aplicados a temas sensibles para los seres humanos, como lo son la escogencia de escuela, la asignación de

residentes a hospitales y el mercado laboral, pueden constituir un elemento valioso para la implementación de políticas sociales.

## Referencias

- Abdulkadiroglu, A., Pathak, P., Roth, A., & Sonmez, T. (2006). Changing the Boston School Choice Mechanism. *NBER Working Paper No.*
- Alcalde, J., Pérez-Castrillo, D., & Romero-Medina, A. (1998). Hiring procedures to implement stable allocations. *Working Papers = Documentos de Trabajo: Serie AD, N° 10, 1997.*
- Alcalde, J., & Romero-Medina, A. (1997). Simple Mechanism to Implement the Core of College Admission Problems. *Games and Economic Behavior*, 30, 294–302.
- Ashlagi, I., Braverman, M., & Hassidim, A. (2014). Stability in Large Matching Markets with Complementarities. *Operations Research*, 62. <https://doi.org/10.1287/opre.2014.1276>
- Ashlagi, I., Kanoria, Y., & Leshno, J. (2017). Unbalanced Random Matching Markets: The Stark Effect of Competition. *Journal of Political Economy*, 125, 69–98. <https://doi.org/10.1086/689869>
- Boudreau, J., & Knoblauch, V. (2008). Marriage Matching and Intercorrelation of Preferences. *Journal of Public Economic Theory*, 12. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9779.2010.01465.x>
- Crawford, V., & Knoer, E. (1981). Job Matching with Heterogeneous Firms and Workers. *Econometrica*, 49, 437–450. <https://doi.org/10.2307/1913320>
- Demange, G., & Gale, D. (1985). The Strategy Structure of Two-Sided Matching Markets. *Econometrica*, 53, 873–888. <https://doi.org/10.2307/1912658>
- Demange, G., Gale, D., & Sotomayor, M. (1986). Multi-Item Auctions. *Journal of Political Economy*, 94, 863–872. <https://doi.org/10.1086/261411>
- Dhillon, J., Purini, S., & Kashyap, S. (2013). *Virtual Machine Coscheduling: A Game Theoretic Approach. Proceedings - 2013 IEEE/ACM 6th International Conference on Utility and Cloud Computing, UCC 2013.* <https://doi.org/10.1109/UCC.2013.47>
- Donald E. Knuth. (1976). *Mariages Stables: et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*. Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal.
- Dubins, L., & Freedman, D. (1981). Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm. *The American Mathematical Monthly*, 88, 485–494. <https://doi.org/10.1080/00029890.1981.11995301>
- Echenique, F., & Oviedo, J. (2004). A Theory of Stability in Many-to-many Matching Markets. *Theoretical Economics, Theoretica*, 233–273.
- Erdil, A., & Ergin, H. (2008). What's the Matter with Tie-Breaking? Improving Efficiency in School Choice. *American Economic Review*, 98, 669–689. <https://doi.org/10.1257/aer.98.3.669>
- Gale, D., & Shapley, L. S. (1962). College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 9–15. <https://doi.org/10.2307/2312726>
- Haeringer, G., & Klijn, F. (2009). Constrained school choice. *Journal of Economic Theory*, 144, 1921–1947. <https://doi.org/10.1016/j.jet.2009.05.002>
- Kamada, Y., & Kojima, F. (2015). Efficient Matching under Distributional Constraints: Theory and Applications †. *American Economic Review*, 105, 67–99.

- <https://doi.org/10.1257/aer.20101552>
- Kamada, Y., & Kojima, F. (2018). Stability and strategy-proofness for matching with constraints: A necessary and sufficient condition. *Theoretical Economics*, 13, 761–793. <https://doi.org/10.3982/TE2717>
- Kelso, A., & Crawford, V. (1982). Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50, 1483–1504. <https://doi.org/10.2307/1913392>
- Klaus, B.-E., & Walzl, M. (2009). Stable Many-to-Many Matchings with Contracts. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1273622>
- Klaus, B., & Klijn, F. (2007). Paths to stability for matching markets with couples. *Games and Economic Behavior*, 58, 154–171. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2006.03.002>
- Kojima, F., & Pathak, P. (2009). Incentives and Stability in Large Two-Sided Matching Markets. *American Economic Review*, 99, 608–627. <https://doi.org/10.1257/aer.99.3.608>
- Kong, X., Wen, L., Ren, J., Hou, M., Zhang, M., Liu, K., & Xia, F. (2019). *Many-to-Many Collaborator Recommendation Based on Matching Markets Theory*. <https://doi.org/10.1109/DASC/PiCom/CBDCCom/CyberSciTech.2019.00032>
- Liu, D., Xu, Y., Wang, J., Xu, Y., Wu, Q., Wang, H., & Shen, L. (2019). Self-Organizing Relay Selection in UAV Communication Networks: A Matching Game Perspective. *IEEE Wireless Communications*, PP, 1–9. <https://doi.org/10.1109/MWC.001.1700434>
- Liu, D., Xu, Y., Xu, Y., Ding, C., Xu, K., & Xu, Y. (2016). Distributed satisfaction-aware relay assignment: a novel matching-game approach. *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies*, 27. <https://doi.org/10.1002/ett.3047>
- McVitie, D. G., & Wilson, L. B. (1970). Stable marriage assignment for unequal sets. *BIT*, 10, 295–309. <https://doi.org/10.1007/BF01934199>
- McVitie, D., & Wilson, L. (1971). The Stable Marriage Problem. *Commun. ACM*, 14, 486–490. <https://doi.org/10.1145/362619.362631>
- Pathak, P., Abdulkadiroglu, A., & Roth, A. (2005). The New York City high school match. *Am Econ Rev Pap Proc. American Economic Review*, 95. <https://doi.org/10.1257/000282805774670167>
- Roth, A. (1985a). Common and conflicting interests in two-sided matching markets. *European Economic Review*, 27, 75–96. [https://doi.org/10.1016/0014-2921\(85\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0014-2921(85)90007-8)
- Roth, A. (1985b). The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory*, 36, 277–288. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(85\)90106-1](https://doi.org/10.1016/0022-0531(85)90106-1)
- Roth, A. (1986). On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets. *Econometrica*, 54, 425–427. <https://doi.org/10.2307/1913160>
- Roth, A. (2008). Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions. *International Journal of Game Theory*, 36, 537–569. <https://doi.org/10.1007/s00182-008-0117-6>
- Roth, A. E. (1982). The Economics of Matching: Stability and Incentives. *Mathematics of Operations Research*, 7, 617–628.
- Roth, A. E. (1984). The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory. *Journal of Political Economy*, 92(6), 991–1016. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/1831989>
- Roth, A. E. (2012). Market Design: Understanding Markets Well Enough to Fix Them When They're Broken. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1889367>
- Roth, A. E., & Sotomayor, M. A. O. (1990). *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic*

- Modeling and Analysis*. Cambridge University Press. Retrieved from <https://books.google.com.co/books?id=JZNGHTZ6qX4C>
- Roth, A., & Peranson, E. (1999). The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design. *American Economic Review*, 89, 748–780.
- Roth, A., & Rothblum, U. (1999). Truncation Strategies in Matching Markets--In Search of Advice for Participants. *Econometrica*, 67, 21–44. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00002>
- Roth, A., & Vande Vate, J. (1990). Random Paths to Stability in Two-Sided Matching. *Econometrica*, 58, 1475–1480. <https://doi.org/10.2307/2938326>
- Shapley, L. S., & Scarf, H. (1974). On cores and indivisibility. *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23–37. [https://doi.org/10.1016/0304-4068\(74\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0304-4068(74)90033-0)
- Shapley, L. S., & Shubik, M. (1971). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1(1), 111–130. <https://doi.org/10.1007/BF01753437>
- Sönmez, T. (1997). Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets. *Journal of Economic Theory*, 77, 197–204. <https://doi.org/10.1006/jeth.1997.2316>
- Sönmez, T., Abdulkadiroglu, A., & Sonmez, T. (2003). School Choice: A Mechanism Design Approach. *American Economic Review*, 93, 729–747. <https://doi.org/10.1257/000282803322157061>
- Sotomayor, M. (2000). Existence of stable outcomes and the lattice property for a unified matching market. *Mathematical Social Sciences*, 39, 119–132. [https://doi.org/10.1016/S0165-4896\(99\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(99)00028-1)
- Sotomayor, M. (2004). Implementation in the many-to-many matching market. *Games and Economic Behavior*, 46, 199–212. [https://doi.org/10.1016/S0899-8256\(03\)00047-2](https://doi.org/10.1016/S0899-8256(03)00047-2)
- Tu, K., Ribeiro, B., Jiang, H., Wang, X., Jensen, D., Liu, B., & Towsley, D. (2014). Online Dating Recommendations: Matching Markets and Learning Preferences. <https://doi.org/10.1145/2567948.2579240>
- Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x>